2020.11

2021年度　大 学 院 経 営 管 理 教 育 部 （専門職学位課程）

入 学 試 験 問 題 （ 一 般 選 抜 ）

【数 学】

第１問

以下の設問全てに答えなさい.

１．変数(x,y)が，$x^2-2xy+2y^2=1$をみたしながら動くとき，以下の問に答えよ.

１）$x^2-2xy+2y^2=1$で囲まれる領域の面積を求めよ.

２）$f(x,y)=x+y$の最大値，最小値を求めよ.

２．同時確率密度関数$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$をもつ連続な確率変数$X$，$Y$を考える.

１）$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx\quad(a>0)$の積分値を求める過程を示した，以下の空欄$\boxed{①}$から$\boxed{⑦}$に当てはまる式，数値あるいは文字を答えよ.

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx$　の値をIとし，逐次積分が重積分で表されるとすると，

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ay^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-ay^2}\,dxdy$$

ここで，極座標(r,θ)を用いて，$x=r\boxed{①}$，$y=r\boxed{②}$と変数変換すると，
$dxdy=\boxed{③}drd\theta$となる.
これらを代入すると，

$$I^2=\int_0^{\infty}\int_0^{\boxed{④}}e^{-a\boxed{⑤}}\boxed{③}drd\theta$$
$$=\boxed{④}\int_0^{\infty}e^{-a\boxed{⑤}}\boxed{③}dr$$
$$=\boxed{⑥}$$

以上から，$I>0$であるので，$I=\boxed{⑦}$となる.

２）X，Yの周辺確率密度関数$f_X(x)$および$f_Y(y)$をそれぞれ求めよ．必要であれば，１）の結果を用いてよい.

３）XとYが独立であることを示せ.

４）$J_n(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}x^ne^{-\alpha x^2}dx$のとき，$J_{n+2}(\alpha)=-\frac{d}{d\alpha}J_n(\alpha)$が成り立つことを示せ.

５）Xの期待値$E(X)$および分散$V(X)$をそれぞれ求めよ．ただし，計算の過程を示すこと．また，必要であれば，１）および４）の結果を用いてよい.

2020.11

2021年度　大 学 院 経 営 管 理 教 育 部 （専門職学位課程）

入 学 試 験 問 題 （ 一 般 選 抜 ）

【数 学】

第２問

以下の設問全てに答えなさい．

1. ある工場では，同じ製品が 3 台の機械 A, B, C で作られている．A, B, C の機械は，全体の製品の 10%，30%，60%を生産している．また，それぞれの機械で生産された製品からは，5%，3%，1%の割合で不良品が発生することが経験的にわかっている．全製品の中から製品を 1 個取り出したとき，それが不良品である確率を求めよ．

2. 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ がある．

   1) この 2 次正方行列 A の固有値を求めよ．

   2) この 2 次正方行列 A の固有ベクトルを求めよ．

3. 回帰式 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \mu_i$ があり，以下の仮定が置かれているとする．

   仮定
   ① 説明変数(x_i) は確率変数ではなく，固定された値である．
   ② 誤差項(μ_i) は確率変数で，その期待値は 0 である．
   ③ 異なる誤差項(μ_i, μ_j) は無相関である．
   ④ 誤差項(μ_i)の分散は一定(σ^2)である．
   ⑤ 誤差項(μ_i)は正規分布$N(0, \sigma^2)$に従う．

   1) 最小二乗推定量$(\widehat{\beta_0}, \widehat{\beta_1})$が不偏推定量であることを示せ．

   2) データ(x_i, y_i) が次のように与えられたとしよう．このときの決定係数(R^2)を少数第 3 位まで求めよ．

i	1	2	3	4
x_i	1	3	8	8
y_i	3	4	8	5